数学 III 基礎_01_02_02 極限　不定形の極限 1　スクラム next

※数学を身につけるための６つのステップ　[日付　　月　　日（　　）　～　　月　　日（　　）]

1. まず自分で読みながら問いをやってみる　チェック□　2. 講義で学ぶ　チェック□　3. 理解の確かめ問題をやる　チェック□

4. 確かめ問題のあとに質問をする　チェック□　5. 練習問題をノートにやる（途中の分析等はしっかり書く）チェック□

6. 練習問題で「問題文の読み取り」「分析」「条件設定（式など）」が身についているか確認する　チェック□

・はじめの問い

1) $\lim_{x \to \infty} x^2$ の極限を調べよ。必要であればグラフを描くこと

2) $\lim_{x \to \infty} -x$ の極限を調べよ。必要であればグラフを描くこと

3) $\lim_{x \to \infty} x^2 - x$ の極限を調べよ。必要であればグラフを描くこと

4) $\lim_{x \to \infty} x^3$ の極限を調べよ。必要であればグラフを描くこと

5) $\lim_{x \to \infty} -x^2$ の極限を調べよ。必要であればグラフを描くこと

6) $\lim_{x \to \infty} x^3 - x^2$ の極限を調べよ。必要であればグラフを描くこと

・性質を支配する項・因数

はじめの問い(3) $\lim_{x\to\infty} x^2 - x$ はグラフを描いて様子を把握すれば、+∞への発散と把握できるが、 $x \to \infty$ を代入する感じで把握しようとすると $\infty - \infty$ となり、$+\infty, 0, -\infty$ のどれになるのかが把握できません。

代入して済む極限は、特別なことがないため、それほど難しくありませんでした。けれども、このように代入しても把握できない場合を「不定形」と言い、次の5種類があります。

※覚えよう「 不定形の5種類 代入したとき $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞} となるもの」

この「不定形」というのも、極限の「特別な場合」に当たり、今回からこの処理方法を学んでいきます。

実は前回学んだ「何次の項の係数が極限に依存しているか」という「次数への着目」も不定形の処理方法の1つです。今回はまずこの方法を拡張して 「支配する項・因数」という考え方へとすすめます。

はじめの問い(1)から(3)では

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,\ \lim_{x\to\infty} -x = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} x^2 - x = \infty$$

(4)から(6)では

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty,\ \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 = \infty$$

となりました。このことは前回グラフを使って確かめたように

$\lim_{x\to\infty} x^2 - x$ では、 $\lim_{x\to\infty} -x$ の極限ではなく、$\lim_{x\to\infty} x^2$の極限と同じになり

$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2$ では、 $\lim_{x\to\infty} -x^2$ の極限ではなく、$\lim_{x\to\infty} x^3$の極限と同じになったことになる。

このことを「 $x^2 - x$ は $x \to \infty$ では、x^2 が支配している 」「 $x^3 - x^2$ は $x \to \infty$ では、x^3 が支配している 」と表現します。

グラフによっても、極限は把握できましたが、グラフはあくまで“補助”。そのため、記述式の解答では「グラフ」グラフとともに、式による根拠の提示が必要になります。支配している項（最高次数の項など）に着目して、次のようにして整理することで、式による根拠の提示となります。

※以下、「 」内、重要事項！

「 $\lim_{x\to\infty} x^n - x^{n-1} = \lim_{x\to\infty} x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right) (= \infty\cdot(1-0) = \infty\cdot 1\,) = \infty$

（括弧内の部分は、厳密には良くないから、記述の時は省力すること。けれども、感覚的にはこのように考えるため、ここでは書いた。）

このような性質を「 $x^n - x^{n-1}$ は $x \to \infty$ では、x^nが支配している 」表現することがあります。

こうして、式の上でも $x^n - x^{n-1}$ は $x \to \infty$ では、x^n の性質に依存することが分かりました。
支配する項（ここでは最大次数の項）で、くくることにより、発散するする因数と、収束する因数に分けることができたためです。

「支配する項でくくる（因数分解）ことで、因数分解型に整理する」ことが、不定形の極限の収束や発散を把握する方法の1つであることを覚えておきましょう。

では次はどうだろう?
問い）$f(x) = x^3 - x^2$について、次の問いに答えよ

1）$f(10),\ f\left(\frac{1}{5}\right), f(1)$ の値を求めよ

2）$f(10)$の値は x^3 と x^2 のどちらの値による影響が大きいか？ 10^3と -10^2 を計算することにより把握せよ

3）$f\left(\frac{1}{5}\right)$の値は x^3 と x^2 のどちらの値による影響が大きいか？

4）$f(1)$の値は x^3 と x^2 のどちらの値による影響が大きいか？

このように、その式を支配する項は領域により変わります。
問い）$f(x) = x^3 - x^2,\ g(x) = x^3,\ h(x) = -x^2$ について、次の問いに答えよ
1）$y = f(x),\ y = g(x),\ y = h(x)$のグラフを描け

2）(1)で書いたグラフを観察し、 $0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq x$ のそれぞれの領域で
$y = f(x)$のグラフの概形が$y = g(x), y = h(x)$ のどちらの関数の支配が強いかを把握せよ

このように、グラフの概形の把握にも「支配する項」という考え方は使えます。

分数関数が含まれたらどうだろう？

問い）次の極限を求めよ。「くくられた形」を参考にせよ

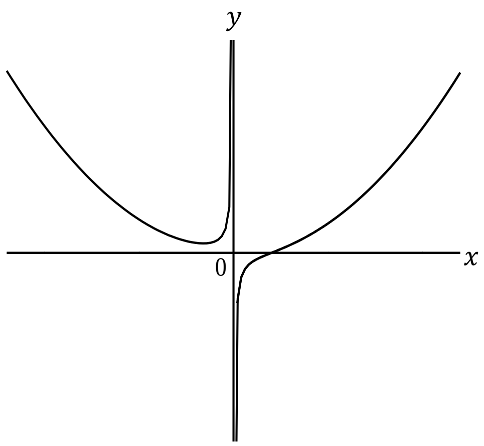
1）$\lim_{x\to\infty} x^2 - \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2(1 - \frac{1}{x^3})$

2）$\lim_{x\to\infty} x^2$, $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}$ を求め、$x \to \infty$ において $x^2 - \frac{1}{x}$を支配しているのは x^2 と$-\frac{1}{x}$ のどちらの項かを把握せよ

3）$\lim_{x\to 0} x^2 - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(x^3 - 1)$

4）$\lim_{x\to 0} x^2$，$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}$ を求め、$x \to 0$ において $x^2 - \frac{1}{x}$を支配しているのは x^2 と$-\frac{1}{x}$ のどちらの項かを把握せよ

5）次のグラフは $y = x^2 - \frac{1}{x}$ のグラフであるが、 x^2が支配する部分と、 $-\frac{1}{x}$が支配する部分について、大体でよいので、それぞれの部分のグラフを〇でかこめ



ここまでで把握したことを整理しましょう。

不定形の処理

支配する項の把握

$\lim_{x \to a} f(x)$ では、$x \to a$ で支配する項(影響力の大きい項)は 正の大きい方 または 負の深い方 であり、

発散する場合は、その項の発散収束に全体が依存する。

くくる

くくる場合は、影響力の大きい項の次数でくくる

※支配する項を把握により、数 III01_01_01 で学んだ、2つのグラフをグラフ上で加えることが、より考えやすくなるだろう

問い)次の極限を調べよ

1) $\lim_{x \to \infty} x^2 - x^3$

2) $\lim_{x \to \infty} x^6 - x(x + x^5)$

3) $\lim_{x \to \infty} x^2 - \frac{1}{x^2}$

4) $\lim_{x \to +0} x^3 - \frac{1}{x^2}$

5) $\lim_{x \to 1-0} x^6 - \frac{1}{x-1}$

6) $\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

問い) 次の関数のグラフをおおまかに描け

1) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1}$

1-1) $y = \sqrt{x}$ のグラフと x の定義域をかけ

1-2) $y = -\frac{1}{x-1}$ のグラフを (1-1)の定義域の範囲内で描け

1-3) 1-1 と 1-2 のグラフを参考に、各部分で支配している項を把握し、$y = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1}$ のグラフをかけ

2） $y = 2^x - \frac{1}{x}$

3） $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

4） $y = \log_2(x) - \frac{1}{x-1}$

5） $y = \log_2 x - \frac{1}{(x-1)^2}$

支配する項という考え方は$x \to \infty$ の範囲では「発散の速さ」ともいわれます。
発散の速さは項に限らず因数（掛け算の構成要素）でも同じような考え方を使えます。

問い） $y = 2^x$, $y = x^2$ のグラフを描け、ただし$x = -2, 0, 1, 2, 3, 4, 10$ での値を計算し
$y = 2^x$ と $y = x^2$ 大小関係を把握して描くこと。 また$y = 2^x$ と $y = \log_2(x)$が逆関数の関係にあることを意識し、$y = \log_2(x)$ のグラフも加えよ

問い） 先ほどの問いのグラフを参照し $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\log_2(x)}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(x)}{x^2}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(x)}{2^x}$ の極限を調べよ

※覚えておくこと

一般的に「$\log_a(x)$（ $a>1$）の発散の速さ ＜ x^nの発散の速さ ＜ a^x（$a>1$）の発散の速さ 」となる

・ **不定形の処理**

不定形の５種類は、極限を求めようとして代入（的なこと）をしたとき $\infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty}$ となるものでした。

その１つの解決法として「支配する項でくくる」という技術を学びました。

分数関数でも分子と分母を最大次数でくくり、約分することで不定形を解決できます。

例） $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{x^2+x-1}$ の極限を求めよう

$x\to\infty$ を代入してみると $\frac{\infty^3+2\cdot\infty+1}{\infty^2+\infty-1}$ となり、$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形になることが確認される

不定形の解決のため分子分母をそれぞれの最大次数でくくる

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{x^2+x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$ 約分をする

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$ $x\to\infty$ を代入してみる

$=\frac{\infty\cdot(1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty})}{\left(1+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}\right)}$

$=\frac{\infty\cdot1}{1}$ 不定形が解決されていることが分かるので、このまま答え

$=\infty$

問い） 次の極限を調べよ

1）$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3+x-1}$

2）$\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x^2+2x-1}$

3）$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+2x-1}$

無理関数（根号）でも同じだが、$\sqrt{x^2}=|x|$ に気を付けよう

例） $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}$　$x \to -\infty$ のとき xは負だから $|x| \to -x$ として先に絶対値を開いておく

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{-x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}$　約分が済んだので $x \to -\infty$ としてみる

$= \frac{(-\infty)^2}{-\sqrt{\left(1+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}\right)}}$

$= \frac{\infty}{-\sqrt{1}} = -\infty$

絶対値の処理に気を付けること

問い）次の極限を調べよ

1）$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}}$　　2）$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-1}}$　　3）$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+x-1}}$

もちろん、式が整理された形で与えられているとは限らないから、因数分解による整理は必須になる。
また、グラフを参照することが極限を求めるときには強力なサポートとなる。グラフが描けそうな形であれば、積極的にグラフを描こう。そのため、これまでの分数関数の取り扱いと同様、帯分数型に整理することもスタンダード。

問い）次の極限を調べよ

1）$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$　　2）$\lim_{x \to 1-0} \frac{-x^3+3x+2}{x^3-2x^2-x+2}$　　3）$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^3-8x^2+2x+12}}{\sqrt{x^3-2x^2-5x+6}}$

「最大次数でくくる」ことの亜種として「指数関数でくくる」こともする

例）$\lim_{x \to \infty} \frac{3^{x+1}}{3^x+2^x}$　の極限を調べよう

まずこのまま $x \to \infty$ とすると、$y = 3^x$ や $y = 2^x$ のグラフを思いうかべると

$\lim_{x \to \infty} \frac{3^{x+1}}{3^x+2^x}$

$= \frac{\infty \cdot 3}{\infty + \infty}$　となり $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形である。

$\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x+2^x}$　　3^xでくくる

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \cdot 3}{3^x\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}$　約分すると

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}$　　ここで$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$のグラフを思い浮かべると　$x\to\infty$ で $\left(\frac{2}{3}\right)^x \to 0$　であるから

$= \frac{3}{1+0} = 3$ と極限が求まる。

くくる目的は、不定形$\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞の解除であるから、くくって整理した後に代入してみても、やはり不定形であれば、ほかのものでくくって整理すればよい。

例）$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-5^x}{3^x+2^x}$ は、このまま$x\to\infty$ にすると$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形である。2^xでくくってみよう

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x\left(1-\left(\frac{5}{2}\right)^x\right)}{2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x+1\right)}$

$= \frac{1-\infty}{\infty+1}$ となり、$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形のままである。

　そういえば、x^n のときは最大次数でくくったことを思い出すと、ここでは最大次数に相当するのは、底の最も大きい5^xであるから、これでくくってみよう

$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-5^x}{3^x+2^x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-1\right)}{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)}$

$= \frac{0-\infty}{0+0} = (0-\infty)\cdot\frac{1}{0} = -\infty\cdot\infty = -\infty$ となり、不定形が解決でき、極限が求まった。

問い）次の極限を調べよ

1）$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-5^x}{3^x+5^x}$　　2）$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-5^x}{7^x-2^x}$　　3）$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

4）$\lim_{x\to\infty} (2^x-5^x)$　　5）$\lim_{x\to\infty} (2^{3x}+3^x-5^x)$　　3）$\lim_{x\to-\infty} 2^x-7^x+1$

最初に代入して不定形かどうかを確かめるのは、そもそも不定形ではない場合、そのまま極限が分かるから。くくるなどを行ったために、かえって極限を読み間違ってしまうことすらあるから、まず初めに代入してみて、不定形かどうか確認することを忘れないように。そして、どうなったら不定形となるかが分からなければ、不定形の解決も何のないのだから、

不定形の形　$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \times \infty,\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty}$　は完全に覚えておくこと。

さて、不定形の解決法は大きく分けて4種類あります。

1. 支配する項・因数への着目とグラフの補助　（次数への着目による支配する項・因数、発散の速さ）
2. くくる・因数分解
3. 有利化とその逆
4. 公式の利用（公式は準公式含め９個）

今回は「1. 支配する項・因数」と「2. くくる・因数分解」を学びました。まだ2種類あります。

次回も不定形の解決法の続きです。

まとめましょう

まず・・・プリントを見返さないで、今覚えているものを書き出してみよう

つぎに・・・プリントを見返してみて、足りないことを書き足したり、違ったことを赤で直して書こう

練習問題）

1）次の極限を調べよ。

1-1）$\lim_{x\to\infty} 2x^2 - x + x^3$

1-2）$\lim_{x\to\infty} -2^x + 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1-3）$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{x-3}$

1-4）$\lim_{x\to-0} \frac{2x-1}{x^3}$

1-5）$\lim_{x\to2+0} \frac{-2x-1}{-2x^3+x^2+5x+2}$

1-6）$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)(2x-1)}{(x-1)(x-2)}$

1-7）$\lim_{x\to0} \frac{2^x-3^x}{5^x}$

1-8）$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-3^x}{5^x}$

1-9）$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-7^x}{3^x-2^x}$

1-10）$\lim_{x\to0} \frac{2^x-7^{x+1}}{7^x-2^x}$

1-11）$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{5}{3}\right)^x$

1-12）$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{2}{5}\right)^x}$

1-13）$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

1-14）$\lim_{x\to1+0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-x}}$

1-15）$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+2}}$

1-16）$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}$

1-17）$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-1}$

1-18）$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$

1-19）$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

1-20）$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{2^x}$

1-21）$\lim_{x\to+0} \frac{\log_2 x}{2^x}$

1-22）$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{2^x-3^x}$

1-23）$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

1-24）$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x-3^x}{x^3-x^2}$

2）次の関数のおおよそのグラフの描け

2-1）$y = 2^x - x^2$

2-2）$y = \frac{2x-1}{x-1} - x^2$

2-3）$y = \log_2(x-1) + 2^x$

2-4）$y = \log_2 3 + \log_2 x - x^3$

2-5）$y = -x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2$

2-6）$y = x^3 - 2^x$

以下の問題は次の視点をもって式を把握せよ

1．式は整理されているか

2．整理したとき、右辺のようにならない原因はどの項・因数か？ → その原因を打ち消す項・因数により退治せよ

3．分子分母それぞれで支配する項・因数に着目し、その発散の速さを考慮した場合
　右辺のようにならない原因はどの次数または関数か？ → その原因を打ち消す次数・関数により退治せよ。

3）$\lim_{x\to2} \frac{x^2+ax-6}{x^2-3x+2} = b$ が成り立つような a, bの値を求めよ

4）$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+3x-6}{x^2-3x+2} = 2$ が成り立つような aの値を求めよ

5）$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n-x^{n-1}}{x^2-3x+2} = 0$ $(n > 0)$ となる nの範囲を求めよ

6）$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n}{x^3-x^2+x} = \frac{1}{2}$ $(n > 0)$ となる $a,\ n$の値を求めよ

7）$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x-2^x}{2^x-3^x} = -1$ となる aの値を求めよ

8）$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^a}{2\sqrt{x^2-x+1}} = -\frac{1}{2}$ となる aの値を求めよ