

※数学を身につけるための6つのステップ [日付 月 日 () ~ 月 日 ()]

1. まず自分で読みながら問いをやる チェック□
2. 講義で学ぶ チェック□
3. 理解の確かめ問題をやる チェック□
4. 確かめ問題のあとに質問をする チェック□
5. 練習問題をノートにやる (途中の分析等はしっかり書く) チェック□
6. 練習問題で「問題文の読み取り」「分析」「条件設定 (式など)」が身についているか確認する チェック□

・はじめの問い

1) 次の式を簡単にせよ

1-1) $a^2b \times \frac{a^3}{b^2}$

1-2) $(a^2b^3)^3$

1-3) $(\sqrt{a^3b})^5$

・指数の拡張

これまで指数で表せなかった根号や分数も今後は指数で表されます。

※指数計算の確認

この計算ができるようになっているかチェックしてください。今後は、当然のこととしてこの計算を行います。

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

※ 1 を指数で表します。

☆ $a^0 = 1$

任意の a で 0 乗 は 1 になります。

※分数を指数で表記します

分数には次のような掛け算の性質があることを確認しましょう

$a \times \frac{1}{a} = 1$

この性質と

$a^m \times a^n = a^{m+n}, a^0 = 1$

から

☆ $\frac{1}{a} = a^{-1}$

とするとうまくいくことがわかります。

分数は -1 乗 です

そのため、次のように表すことができます

$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = (a^{-1})^2 = a^{-2}$

今後は a^{-2} が $\frac{1}{a^2}$ のことと、当然のように扱います、

問い) 次の分数を指数で表せ

1) $\frac{1}{a}$

2) $\frac{1}{-a}$

3) $\frac{1}{a^5}$

4) $\frac{1}{(-a)^3}$

5) $\frac{c}{a^2b^3}$

6) $\frac{a^2}{b^3c^{-2}}$

問い) 次の分数、小数を指数で表せ

1) $\frac{1}{6}$

2) $\frac{1}{8}$

3) 0.01

4) 0.0002

5) $\frac{1}{128}$

6) $\frac{27}{1024}$

※根号を指数で表記します

根号には次のような累乗の性質があることを確認しましょう

$$\sqrt{a^2} = a$$

この性質と

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

から

$$\star \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

とするとうまくいくことがわかります。

根号は $\frac{1}{2}$ 乗 です

そのため、次のように表すことができます

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a^3} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}}$$

分数乗も普通に扱います。

問い) 次の根号を指数で表せ

1) \sqrt{a}

2) $(\sqrt{a})^2$

3) $(-\sqrt{a})^5$

4) $\frac{1}{(-\sqrt{a})^3}$

5) $\frac{b}{a^2\sqrt{a}}$

6) $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}c^{\frac{3}{2}}}$

※根号を拡張します。

2乗して根号がとれるのが通常の $\sqrt{\quad}$ でした。そのため $\sqrt{a^2} = a$ でした。

3乗根は3乗して根号が取れます。 $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ です。そのため、

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

と表記されます。

もっと拡張すると一般的にn乗根 (n乗して根号が取れる) は

$$\star \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

と表記します。

指数での表記ができるようになったため、すべてを指数表記にし、指数で計算し、最後に根号に戻すような計算手順ができるようになりました。

たとえば

$$\frac{\sqrt{b}}{a^2 \cdot \sqrt[3]{b^2}} = b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2} \cdot \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} = b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2} \cdot b^{-\frac{2}{3}} = a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = a^{-2} b^{-\frac{1}{6}}$$

場合によってはこれを根号表記にして

$$\frac{1}{a^2 \sqrt[6]{b}}$$

とすることもできます。

数の累乗も同じです

$$\frac{\sqrt{6}}{3^2 \cdot \sqrt[3]{6^2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2} \cdot (2 \cdot 3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}-2-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{13}{6}} = 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{-(2+\frac{1}{6})} = 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} = 3^{-2} \cdot (6)^{-\frac{1}{6}}$$
$$= \frac{1}{9 \cdot \sqrt[6]{6}}$$

途中をあまり省略せずに計算を進めたので、長くなりましたが、適宜ショートカットできるように練習を積んでください。

問い) 次の根号を指数で、指数は根号を使って表せ

1) $\sqrt[5]{a}$

2) $(\sqrt[3]{a})^2$

3) $(-\sqrt[3]{a})^5$

4) $\frac{1}{(-\sqrt[5]{a})^3}$

5) $\frac{b}{a^2 \sqrt[3]{a}}$

6) $-a^{\frac{1}{3}}$

7) $(-a)^{\frac{1}{5}}$

8) $a^{-\frac{1}{3}} b^2 c^{\frac{3}{2}}$

9) $(-a^2 b c^3)^{-\frac{2}{3}}$

5) $\frac{b}{a^2 \sqrt[3]{a}}$

問い) 次の式を簡単にせよ

1) $\sqrt[3]{72}$

2) $(\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}})^2$

3) $(\sqrt[3]{81} \div \sqrt[3]{-3})^5$

4) $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$

共通部分を文字で置き換える技術は指数表記でも変わりません。 $a^t = A$ とした場合、 $a^{-t} = A^{-1}$ です

問い) $2^{2a} + 8 \cdot 2^{-2a} = 6$ のとき、 a の値を求めよ

a^{-1} は分数でしたから両辺に a をかけることで分母を処理できるのはこれまでと同じです。

$a^{-1} - a + 2 = 0$ は両辺に a をかけて $1 - a^2 + 2a = 0$ となり2次方程式になります。

$a^{\frac{1}{2}}$ は根号です。根号は両辺2乗することで根号を処理できましたが、この技術も使えます。

$a^{\frac{1}{2}} = 3$ なら $(a^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2$ より $a = 9$ です。

$a^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$ をこのまま両辺2乗すると $a - 6a^{\frac{1}{2}} + 9 = 0$ となり、根号 $a^{\frac{1}{2}}$ が残ります。根号で両辺2乗するときと同じく、根号を含むものと含まないものを辺々に分離してから2乗しましょう。

$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$ は $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = -3$ としてから両辺2乗し $a - 2 + a^{-1} = 9$ として根号 ($\frac{1}{2}$ 乗) を消去できます。

注意しなければならないのは、 $a^{\frac{1}{2}}$ は根号ですから、「虚数を含む」場合以外は $a \geq 0$ であること。
また $a^{-\frac{1}{2}}$ は根号であり、 a は分母ですから $a \geq 0$ かつ $a \neq 0$ の条件が必要で $a > 0$ となります。
つまり、 a が虚数を含まず（実数）であれば

与えられた式に $a^{\frac{1}{2}}$ が含まれていれば $a \geq 0$ が条件に必要

与えられた式に $a^{-\frac{1}{2}}$ が含まれていれば $a > 0$ が条件に必要

同じく、与えられた式に a^{-1} が含まれていれば $a \neq 0$ が条件に必要

これらを必ず把握して条件としてください。

問い) 次の方程式を解け

1) $1 - 6x^{-1} = 0$

2) $6x^{-\frac{1}{2}} - 12 = 0$

3) $x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$

$a + a^{-1}$ は 対称式の関係にありますから、基本対称式 $a + a^{-1} = k$, $a \cdot a^{-1} = t$ のような置き換えもこれまで通りです。ただし、 $a \cdot a^{-1} = 1$ ですから、クロースタームが初めから解決されているため通常の対称式より利用は楽になります。

問い) $a + a^{-1} = 2$ のとき $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ の値と $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ

また $a + a^{-1}$ は $a > 0$ の条件が加われば相加相乗平均の関係とも相性が良いしきになります。

思い出そう

相加相乗平均の関係

条件: $a > 0, b > 0$ のとき (a, b がともに正のとき)

成り立つこと: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (相加平均 $\frac{a+b}{2}$ と相乗平均 \sqrt{ab} の関係式)

問い) $a > 0$ のとき $a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}$ の最小値を求めよ

今回の講義をまとめよう

まず・・・プリントを見返さないで、今覚えているものを書き出してみよう

つぎに・・・プリントを見返してみて、足りないことを書き足したり、違ったことを赤で直して書こう

理解の確認問題)

今回はなし

練習問題)

1) 次の値を整数で求めよ

$$1-1) \frac{3^{2 \cdot 2^{-2}}}{6^{-2}} \quad 1-2) \frac{3^{2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}}{6^{\frac{3}{2}}} \quad 1-3) \sqrt[5]{32} \quad 1-4) \sqrt[3]{729} \quad 1-5) \sqrt[3]{-216}$$

2) 次の計算を行い 指数表記で答えよ

$$2-1) \sqrt[4]{3^4 \sqrt{27^4} \sqrt[4]{16}} \quad 2-2) \sqrt[3]{9^3 \sqrt{24} \sqrt{6}} \quad 2-3) \sqrt[3]{2^4 \sqrt{3^3 \sqrt{3}}} \quad 2-4) \frac{a^3 \sqrt[4]{a^4 \sqrt{a \sqrt{a}}}}{\sqrt{a}}$$
$$2-5) \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} \div \sqrt[5]{5} \quad 2-6) \sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \quad 2-7) (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) \quad 2-8) (a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}})(a^3 + a^{-3} + 1)$$

3) $a^b + a^{-b} = 3$ のとき $a^{2b} + a^{-2b}$, $a^{\frac{b}{2}} + a^{-\frac{b}{2}}$, $a^{\frac{5b}{2}} + a^{-\frac{5b}{2}}$ の値を求めよ

4) $a^{-\frac{1}{2}} = 4$ のとき a の値を求めよ

5) $a > 0$ のとき $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ

6) 次の方程式の解を求めよ

$$6-1) 4x^{-1} + 8x^{-2} = 0 \quad 6-2) 4x^{-\frac{1}{2}} + 1 = 0 \quad 6-3) x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$$