数学ⅡB 基礎_03_03_01　三角関数の各種公式　スクラム next

※数学を身につけるための６つのステップ ［日付　月　日（　）～　月　日（　）］

1. まず自分で読みながら問いをやってみる　チェック□　2. 講義で学ぶ　チェック□ 3. 理解の確かめ問題をやる　チェック□

4. 確かめ問題のあとに質問をする　チェック□　5. 練習問題をノートにやる（途中の分析等はしっかり書く）チェック□

6. 練習問題で「問題文の読み取り」「分析」「条件設定（式など）」が身についているか確認する　チェック□

・はじめの問い

1) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ を$\sin(\theta), \cos(\theta)$ で表せ

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ を計算せよ。また$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を計算せよ

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ を計算せよ。また$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を計算せよ

・ 三角関数の各種公式

数Ⅱで学ぶ三角関数の公式は非常に多くあります。

まず、覚えましょう。

加法定理

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\, cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\, cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\, cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\, cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

三角関数はその名前に関数とはいっているように関数です。関数は通常 $y=f_{(x)}$ と書きますが、三角関数は特別な関数として、一般的なfではなく、サインとかコサインという名前をつけて$y=\sin(x)$, $y=\cos(x)$, $y=\tan(x)$

と書きます。つまり、$y=\sin(x)$のxは、$y=f_{(x)}$のxと同じく、変数を表します。

$y=f_{(x)}$ で $f_{(x+y)=}f_{(x)}+f_{(y)}$ が常に成り立たつわけではなかったように、三角関数でも

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)+\sin(\beta)$ は成り立ちません。はじめの問いで確かめましたね。

（$\alpha=0,\beta=0$のような特殊な場合だけイコールが成り立つことはあります。）

一般的には関数$y=f_{(x)}$に対して$y=f_{(a+b)}$ を $f_{(a)}$ と $f_{(b)}$ で表す公式は存在しませんが、三角関数に関しては関数形が決まっているため、$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$のように、変数の和 $\alpha+\beta$ を計算する方法が公式として決められます。それが加法定理。

つまり「 加法定理は変数部分の和と差の解決に使う式です 」

加法定理の変形が倍角の公式です。加法定理で$\alpha=\beta$ とすると。

$sin(2\alpha)=2sin(\alpha)cos(\alpha)$

・困難を生じることの多いクロスターム $sin(\alpha)cos(\alpha)$ を $sin(2\alpha)$に

・$cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha)=1$ と合わせると$cos^2(\alpha)+2\sin(\alpha)\cos(\alpha)+sin^2(\alpha)$を作れる。これにより、$1+sin(2\alpha)=\{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\}^2$

（クロスタームの利用、対称式の利用による発想）

$cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)$

・右辺は2乗で左辺は1乗 次数の変化に使える

・クロスターム含まず ２αとαの変換ができるため、変数合わせ（αに統一とか、２αに統一）に使える

$tan(2\alpha)=\frac{2\,tan(\alpha)}{1-tan^2(\alpha)}$

$\cos(2\alpha)$については$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$ を使って代入することで、3 つの形に表せるので、各問題で扱っている式に合わせて使い分けましょう。

使い分け方の基準は 変数を合わせる、共通部分をつくる、など通常の関数を同じですが、共通部分として$cos(x),\sin(x),tan(x)$なども含まれますので覚えておきましょう。

$$cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)=2\,cos^2(\alpha)-1=1-2\,sin^2(\alpha)$$

・右辺は2乗で左辺は1乗 次数の変化に使える

・共通部分を$cos(2\alpha),\cos(\alpha),\sin(\alpha)$などに合わせたいときに使える

倍角の公式$cos(2\alpha)$で$\alpha=\frac{x}{2}$ として整理したのが半角の公式です。

$\sin^2(\frac{x}{2})=\frac{1-\cos(x)}{2}$, $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos(x)}{2}$ ・左辺は2乗で右辺は１乗

加法定理の$sin(\alpha+\beta)$ と $sin(\alpha-\beta)$ の辺々を足したものと引いたもの

同じく加法定理の$cos(\alpha+\beta)$ と $cos(\alpha-\beta)$ の辺々を足したものと引いたものを整理すれば積和の公式です

$sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)\}$ 足して整理

$cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}\{sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)\}$ 引いて整理

$cos(\alpha)cos(\beta)=\frac{1}{2}\{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)\}$ 足して整理

$sin(\alpha)sin(\beta)=\frac{1}{2}\{cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)\}$ 引いて整理

・左辺はクロスタームだが、変数部分がαとβで分かれている。

・右辺はクロスタームは解除されているが変数部分は$\alpha+\beta$ と $\alpha-\beta$ になってしまっている。

積和の公式で$\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ として連立し$\alpha=\frac{A+B}{2}$, $\beta=\frac{A-B}{2}$ として代入し整理したのが和積の公式です

$$sin(A)+\sin(B)=2sin\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\ (\frac{A-B}{2})$$

$$sin(A)-\ \sin(B)=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)sin\ (\frac{A-B}{2})$$

$$cos(A)+\ cos(B)=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\ (\frac{A-B}{2})$$

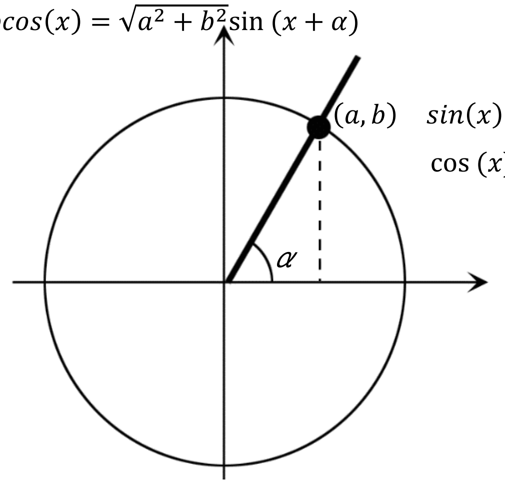
$$cos(A)-\ cos(B)=2sin\left(\frac{A+B}{2}\right)sin\ (\frac{A-B}{2})$$

・左辺はクロスタームでなく、変数もA と B で穏やかな性質

・右辺はクロスタームで、変数部分も$A+B$ と $A-B$ になってしまっている。

加法定理と極座標の円を組み合わせて解釈したのが合成の公式

$$asin(x)+bcos(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\ (x+\alpha)$$



$sin(x)$ の係数が「 よこ 」

$\cos\ (x)$ の係数が「 たて 」

このグラフは公式に出てくる角度αを与える重要なグラフですから、合成を使うときは一緒に描きます。

グラフから$\sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ と読み取り、これをつかってa,bを描きなおせば

加法定理 $sin(x+\alpha)=sin(x)\,cos(\alpha)+cos(x)\,sin\ (\alpha)$ になります。

合成の公式は $asin(x)+bcos(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\ (x+\alpha)$ ですから、$sin(x)$ と $cos(x)$ の和の計算に使います。

ほかの公式は$sin(x)$ と $cos(x)$の係数が同じでなければ使えませんでしたが、合成だけは同じでなくても使えます。

三角関数の公式と、その代表的な着目点を紹介しました。

着目した点は他の単元と同じく「変数は？」「次数は？」「クロスタームは？」の 3 点です。

公式は知っているだけでなく、着目点や利点を把握していることで、使う場面や応用のきっかけを与えてくれます。

「変数」「次数」「クロスターム」への着目を習慣にしましょう。

・加法定理と図形

ところで、三角関数は図形からのアイディアでしたらから、図形での把握も重要です。特に加法定理と図形の関係は身に着けておきましょう。

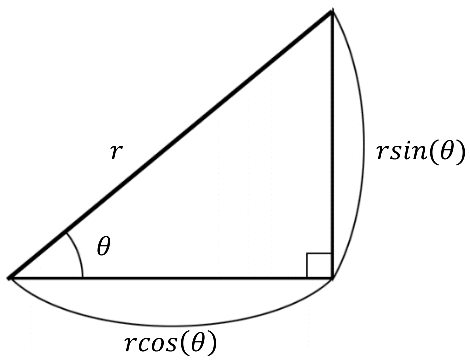
例として　$\cos(\alpha+\beta\ ) = \cos(\alpha)\,cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$　で行います。

準備として数 A での基礎の確認

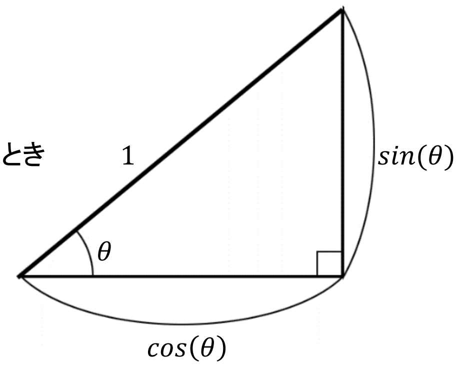
斜辺をr　とする

底辺は$rcos(\theta)$（x方向への射影）

高さは$rsin(\theta)$　（y方向への射影）

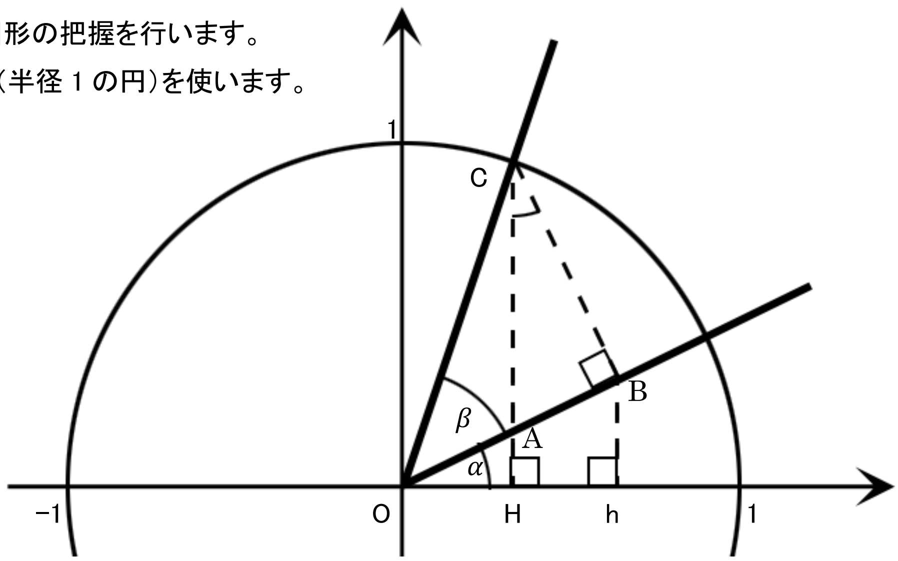


とくに斜辺が1のとき



$\cos(\alpha+\beta\ )$と図形の把握を行います。

今回は単位円（半径 1 の円）を使います。



単位円の利点は射影により、直角三角形の底辺や高さをcos、sinで係数を1として扱えるため、半径を取り扱う必要がなく、楽できます。射影により

$OH = cos(\alpha+\beta)$

$OB = cos(\beta)$　これよりさらに　$Oh = cos(\beta)\cos(\alpha)$

$CB = \sin(\beta)$

ところで∠BCA=α　ですから$AB = CB \times \tan(\alpha) = \frac{\sin(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$Hh = AB \times \cos(\alpha) = \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$OH = Oh - Hh$より

$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

今回の講義をまとめよう

まず・・・プリントを見返さないで、今覚えているものを書き出してみよう

つぎに・・・プリントを見返してみて、足りないことを書き足したり、違ったことを赤で直して書こう

理解の確認問題）

1）$\sin(x) = \frac{a}{r},\ \sin(y) = \frac{b}{r}$ のとき、次の三角関数をa, bを用いて表せ

1−1）$\sin(x+y)$　1−2）$\sin(x-y)$　1−3）$\sin(y-x)$

1−4）$\cos(x+y)$　1−5）$\cos(x-y)$　1−6）$\cos(y-x)$

2）次の式を整理し簡単にせよ

2−1）$sin(x+y)\sin(x-y)$　2−2）$cos(x+y)\cos(x-y)$　2−3）$\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$

2−4）$-\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$　2−5）$2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x)$　2−4）$\sin^4(x)-\cos^4(x)$

3）$\sin(x) = \frac{a}{r}, a^2+b^2=r^2$ が成り立つとき、次の三角関数をa, bを用いて表せ

3−1）$\sin(2x)$　3−2）$\cos(2x)$　3−3）$\sin^2(\frac{x}{2})$　3−4）$\cos^2(\frac{x}{2})$

練習問題）

1）$\sin(x) = \frac{a}{r},\ \sin(y) = \frac{b}{r}$ のとき、次の三角関数をa, bを用いて表せ

1−1）$sin(x)+cos(2x)$　1−2）$\sin(3x)$　1−3）$\sin(y-x)$

1−4）$\cos(x+y)$　1−5）$\cos(x-y)$　1−6）$\cos(y-x)$

2）$sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}$ のとき、$sin(2x)$の値をもとめよ

3）次の式を整理せよ

3−1）$sin\,4x\cos x$　3−2）$cos\,3x\cos 2x$

4）$\sin(x+y)=a,\ \sin(x-y)=b$ ，$K=\sin(2x)+\sin(2y)$ のとき、Kをa, bを用いて表せ。

さらに $b^2=2a+3$とするとKの最小値をもとめよ。

5）点 AB を直径とする円 O の円周上に点 C,D をとる(AC<AD、C, D は同じ弧 AB 上)。$AB=4, cos\angle BAC=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

5−1) AC の長さを求めよ。

5−2）線分 AD と線分 BC の交点を E とすると$cos\angle EAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$である。このとき BD の長さをもとめよ。

5−3）$3\cos(\angle BAD)-\sqrt{3}\sin(\angle BAD)$ の値を求めよ