数学Ⅰ 基礎_01_01_09　平方根　　スクラム next

※数学を身につけるための６つのステップ ［日付　　月　　日（　　）　～　　月　　日（　　）］

1. まず自分で読みながら問いをやってみる　チェック□　2. 講義で学ぶ　チェック□ 3. 理解の確かめ問題をやる　チェック□

4. 確かめ問題のあとに質問をする　チェック□　5. 練習問題をノートにやる（途中の分析等はしっかり書く）チェック□

6. 練習問題で「問題文の読み取り」「分析」「条件設定（式など）」が身についているか確認する　チェック□

**はじめの問題**

1）$a=3$ のとき$\sqrt{a^2}=a$　は成り立つか？

2）$a=-3$ のとき$\sqrt{a^2}=a$　は成り立つか？

**・平方根のとりあつかい**

はじめの問いは中３で平方根を学んだときによく出題されたこんな問題を覚えているだろうか？

問い）次のなかで誤っているものを選べ

$a. \sqrt{3^2}=3$

$b. \sqrt{(-3)^2}=-3$

$c. \left(-\sqrt{3}\right)^2=3$

$d. -\sqrt{(-3)^2}=3$

$\sqrt{3^2}=3$　であり、　$\sqrt{(-3)^2}=3$　である。

そのため、この性質を文字で表すには絶対値が必要になる。

$\sqrt{a^2}=|a|$

絶対値ということは、前回学んだように、場合分けが必要なときもある

問い）次の根号をはずせ

1）$\sqrt{(-2)^2}$　　2）$\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2}$　　3）$\sqrt{(x-1)^2}$

4）$\sqrt{(x^2-1)^2}$　　5）$\sqrt{(x^2-3x+2)^2}$　　6）$\sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}$

根号を外すというのは、絶対値問題になるのであるから、絶対値で表現された問題は根号の問題にもなる。

問い）$y=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(2x+1)^2}$　のグラフを描け

グラフを見られるということは、不等式を解くこともできる

問い）$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2} \leqq 3$　を満たす $x$ の範囲を求めよ

根号の中身は２乗の形になれば根号を処理することができるため、根号の中身は因数分解した形と親和性が高い。
問い）次の根号を処理せよ

1） $\sqrt{x^2-2x+1}$　　2） $\sqrt{4x^2+24x+36}$　　3） $\sqrt{\frac{16x^2-64x+64}{9x^2-36x+36}}$

また、根号の中身は正でなければならないという決まりもあるが、正負を把握するのも因数分解型と親和性が高い。
問い）次の式の定義域（$x$の範囲）を求めよ

1） $\sqrt{x-1}$　　2） $\sqrt{-2x+1}$　　3） $\sqrt{(x+1)(x-2)}$

4） $\sqrt{x^2-3x+2}$　　5） $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$　　6） $\sqrt{\frac{x^2+x-2}{x^2-1}}$

このように、式はその表現されている形の性質により、親和性の高い（処理が楽になる）形があることを覚えておいてほしい。そのため、式を見たら、すぐに解こうとするのではなく、整理することが目標となる。特に親和性を見極め、親和性の高い形への整理が解決へと導くことが多い。
　また、どのような表現形式がどのような形と親和性が高いかを知っていくこと、判断できるようになることが、高校生が数学の基礎力として身に着けていくことの１つになる。

**・二重根号**
　因数分解できるのは文字だけではない。根号も因数分解型への変形が可能である。
例）　$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+1$ を因数分解型に変形しよう
　文字の因数分解では、着目した文字の降べきの順にまず整理することから始めた。ここでも同じように整理を行うが、$\sqrt{2}$　か $\sqrt{3}$ で整理する。ここでは$\sqrt{2}$ の降べきに直していく
　$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+1$
　$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}+1$（$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$　の　・　は掛け算を表す）
　$=(1+\sqrt{3})\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$
　$=(1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)$

　初めて見ると、無理やりだなぁと思うかもしれませんが（私は思いました）、どのような形にしたいかという目的をもっていれば、このような無理やりな変形も良く行う。

$\sqrt{2}$で整理するという方針で式を扱う場合、 $2=\sqrt{2}^2$ であることを注意しなければならない。こちらはもっと無理やり感がある。

例）$\sqrt{2}+2+\sqrt{5}+\sqrt{10}$

$=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$=\sqrt{2}^2+(1+\sqrt{5})\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

問い）次の式を因数分解型に直せ

1）$-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}$

2）$-3\sqrt{2}+2-3\sqrt{3}+\sqrt{6}$

3）$\sqrt{3}+6+\sqrt{5}+2\sqrt{15}$

4）$\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{30}$

5）$1+2\sqrt{3}+3$

6）$4+4\sqrt{5}+5$

ここまでの問いの 5,6 は二乗の形に因数分解された。先ほどの問いでは$1+2\sqrt{3}+3$ のように、1 と 3 を分けて書いたが、本来は$4+2\sqrt{3}$ のように計算されてしまっている。この場合、因数分解型にするという目的のもと、$\sqrt{3}$を頼りにして、$4=1+\sqrt{3}^2$ と進める必要がある。

問い）次の式を因数分解型に直せ

1）$3-2\sqrt{2}$

2）$11+6\sqrt{2}$

$\sqrt{6}$ などは $1\cdot\sqrt{6}$ かもしれないし $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ かもしれない。ここまでくると、候補が多すぎて手におえなくなるから、一度文字で整理しておこう。

$\left(\sqrt{k}+\sqrt{t}\right)^2$
$=k+t+2\sqrt{kt}$

この式を観察すれば、整数部分が和 $k+t$ で、根号の中身が積 $kt$ であることがわかる。
この構造は中３の因数分解と似ている。因数分解では
$(x+a)(x+b)$
$=x^2+(a+b)x+ab$
という構造から、１次の係数が和 $a+b$ で、定数項が積 $ab$ として扱った。

同様にして根号を含む因数分解も可能になる。ただし根号の部分 $+2\sqrt{kt}$ ルートの前が 2　でなければこの式は使えない。
例）　$5+2\sqrt{6}$　和が 5, 積が 6 より
$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

より一般的には
$\left(a\sqrt{s}+b\sqrt{t}\right)\left(c\sqrt{u}+d\sqrt{v}\right)$
$=ac\sqrt{su}+ad\sqrt{sv}+bc\sqrt{tc}+bd\sqrt{tv}$
により各根号の部分を比べればよい。この事柄は複雑すぎ、また高等数学としての学びもそれほど多くないため、問題として出題してもされることもほぼないが、一応、見ておこう。
例）$2\sqrt{10}+6\sqrt{3}+4\sqrt{15}+18\sqrt{2}$
根号の中に着目するが、積の形で捉えるべきであるから因数分解型で表す。
$10=2\cdot5$
$3=1\cdot3$
$15=3\cdot5$
$2=1\cdot2$
$ac\sqrt{su}+ad\sqrt{sv}+bc\sqrt{tc}+bd\sqrt{tv}$　を見てみれば、根号の中$s,t,u,v$の 4 つ整数からなる。
今回の場合、2, 3, 5, 1 が抽出されるが、1 は$\sqrt{1}=1$　と根号が 4 つあることと矛盾するため、1 があっては困る。

各係数部分を見てみよう
$2=1\cdot2$
$6=2\cdot3$
$4=2\cdot2$
$18=2\cdot3\cdot3$
$ac\sqrt{su}+ad\sqrt{sv}+bc\sqrt{tc}+bd\sqrt{tv}$　を見てみれば、同じく$a,b,c,d$の４要素のはずである。
が、1, 2, 3 が抽出され、18 は 3 要素に分かれる。
根号部分から、1 があっては困るため、$6\sqrt{3}$の 6 から 2 を、$18\sqrt{2}$の 18 から 3 をそれぞれルートの中に入れて矛盾がないかを確かめる。
$2\sqrt{10}+3\sqrt{12}+4\sqrt{15}+6\sqrt{18}$
根号の中　$10=2\cdot5,\ 12=2\cdot2\cdot3,\ 15=3\cdot5,\ 18=3\cdot3\cdot2$
係数　$2=1\cdot2,\ 3=1\cdot3,\ 4=2\cdot2,\ 6=2\cdot3$
根号の中は 2, 3, 5 となるが、3 要素ある部分を $3\cdot2=6$ でまとめなおすと、2, 3, 5, 6 の４要素

係数部分は 1, 2, 3, 2 の４要素
それぞれの掛けられ方を考察すれば
$2\sqrt{10}+6\sqrt{3}+4\sqrt{15}+18\sqrt{2}$
$=(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})$
と因数分解型に直せる

ただし、先ほども述べたが、$(a\sqrt{s}+b\sqrt{t})(c\sqrt{u}+d\sqrt{v})$はかなり事情がある場合でなければ扱わないだろうから、とりあえず練習はしなくても良いだろう。しかし $(\sqrt{k}+\sqrt{t})^2$ に関しては扱われる場面が多いから練習しておこう。

問い）つぎの各式を因数分解型に直せ。ただし引き算で結ばれている場合、答えは２種類ともかくこと

1）$4+2\sqrt{3}$　2）$8+2\sqrt{15}$　3）$4-2\sqrt{3}$　4）$8-2\sqrt{15}$

根号の前に 2 がない場合はどうしよう？

$a.$ $6\sqrt{3}\to 2\sqrt{27}$ のように、根号の中に入れて 2 を残す
$b.$ $\sqrt{12}\to 2\sqrt{3}$ のように、根号の中から 2 を出す
$c.$ $8+4\sqrt{3}\to 2(4+2\sqrt{3})$のように、くくる
$d.$ $\sqrt{2}\to\frac{2\sqrt{2}}{2}$ のように、分子分母に 2 をつける

のように、大体４種類の技術を使う。

もちろん $3\sqrt{12}\to 2\sqrt{27}$ や　$3\sqrt{3}\to\frac{2\sqrt{27}}{2}$ のように、複数を同時に使う場合もある。

問い）次の各式を因数分解型に直せ。ただし引き算で結ばれている場合、答えは２種類ともかくこと

1）$8+4\sqrt{3}$　2）$12+\sqrt{70}$　3）$4-\sqrt{15}$　4）$21+6\sqrt{10}$

5）$\frac{7}{2}+\sqrt{6}$　6）$9+3\sqrt{8}$　7）$4-\sqrt{7}$　8）$6-4\sqrt{2}$

２乗の形になれば、次のような二重根号も処理できる

例）$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}}$

$= \frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}$　　… $\sqrt{A^2} = |A|$　であることに注意

$= -\frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　…有利化も忘れずに

文字が入っても処理できるだろう

例）$\sqrt{2+a-2\sqrt{2a}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\,\right)^2}$

$= |\sqrt{a}-\sqrt{2}\,|$

$0 \leqq a < 2$　のとき　$\sqrt{2}-\sqrt{a}$

$2 \leqq a$　のとき $\sqrt{a}-\sqrt{2}$

問い）次の二重根号をはずせ

1）$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$　　2）$\sqrt{3-\sqrt{8}}$　　3）$\sqrt{2+\sqrt{3}}$　　4）$\sqrt{x+3+\sqrt{12x}}$

5）$\sqrt{x+3-2\sqrt{3x}}$　　6）$\sqrt{a+1-\sqrt{4a}}$　　7）$\sqrt{1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

**・有利化**

根号を含む式では、有利化された形が整理された形である。そのため、分母に根号がある場合は、有利化して整理してみなければ、その式の正体は分からない。

高校では次のような有利化を学ぶ

$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ を有利化しよう。$\sqrt{a}^2 = a$ という性質と$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ という関係を使えば、次のように有利化できる

$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}$

$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

問い）次の式を簡単にせよ

1） $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$　　2） $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$　　3） $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}$　　4） $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

※ $1+\sqrt{2}=X$と置き換えて見通しを良くしてもよい

5） $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}}$　　6） $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4-\sqrt{15}}}$

**今日の講義をまとめよう**

まず・・・プリントを見返さないで、今覚えているものを書き出してみよう

・今回学んだ　着目個所　はありましたか？　それはどんなことでしたか？

・今回学んだ　グラフや図、表、式への表現方法　はありましたか？　それはどんなことでしたか？

・今回学んだ　式やグラフからの読み取り　はありましたか？　それはどんなことでしたか？

つぎに・・・プリントを見返してみて、足りないことを書き足したり、違ったことを赤で直して書こう

・今回学んだ　着目個所

・今回学んだ　グラフや図、表、式への表現方法

・今回学んだ　式やグラフからの読み取り