※数学を身につけるための６つのステップ ［日付　月　日（　）～　月　日（　）］

1. まず自分で読みながら問いをやってみる　チェック□　2. 講義で学ぶ　チェック□ 3. 理解の確かめ問題をやる　チェック□

4. 確かめ問題のあとに質問をする　チェック□　5. 練習問題をノートにやる（途中の分析等はしっかり書く）チェック□

6. 練習問題で「問題文の読み取り」「分析」「条件設定（式など）」が身についているか確認する　チェック□

はじめの問題

1）3　の絶対値を答えよ

2）-3　の絶対値を答えよ

3）$\sqrt{3}-1$ の絶対値は　$\sqrt{3}-1$ となるか、ならないか？

4）$1-\sqrt{3}$ の絶対値は　$1-\sqrt{3}$ となるか、ならないか？

5）$a=3$ のとき$\sqrt{a^2}=a$　は成り立つか？

6）$a=-3$ のとき$\sqrt{a^2}=a$　は成り立つか？

・絶対値

中学数学のはじめの頃に絶対値を学びました。

3 の絶対値は 3

-3 の絶対値も 3

でした。絶対値は常に正の値をとります。（絶対値が負というのは存在するのか分かりませんので、そもそも正というのも違和感があります。「負」が想定されてこその「正」ですから、絶対値に「負」が想定されないならば、「絶対値は正」ではなく「絶対値は符号を持たない」という表現の方が適切になります。ここでは「負の絶対値が存在しない」ということを想定せず、「負の絶対値が存在する（かもしれない。または今後定義されるかもしれない。）」という可能性を残しつつ「正の値をとります」と表現しておきます。）

このため、数字のときは「絶対値は符号をつけなければいい」くらいでよかったのですが文字になってしまうと困ります。

$a=3$　では、aは正になります

$a=-3$ では、aは負であり、$-a$が正になります

そのため、文字で絶対値を表すときには次のように、分けなければなりません。

a　の絶対値は　$a \geqq 0$ のとき a 、　$a<0$ のとき $-a$

（$a>0$ のとき a 、　$a \leqq 0$ のとき $-a$　でも構いません。どちらに「＝」を入れても大丈夫です。ただし、どちらにも＝がない場合は　$a=0$　が除外されて考えられたことになりますので、注意してください。もちろん　$a>0$のとき、$a=0$のとき、$a<0$のときの３つに分けても構いません。）

数学では「 可能性のあるすべての場合を調べよ 」という規則があります。そのため文字が含まれる場合はこのように全ての場合を分けて議論しなければなりません（「場合分け」と言われたりします）

高校数学では絶対値にも記号が与えられます。
$|a|$　と書いたとき、aの絶対値を意味します。

問い）次の値を求めよ
1）$|2|$　　2）$|-2|$　　3）$|\sqrt{2}|$　　4）$|-\sqrt{2}|$

$|\ 1-\sqrt{2}\ |$のような場合にはどうしましょう？
$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$ですから　$1-\sqrt{2}<0$　になります。
ですから　$\left|1-\sqrt{2}\right| = 1-\sqrt{2}$　ではありません。

文字で表したときの表記とおなじく処理できます。
$|\ a\ |$　は $a \geqq 0$のとき $|a| = a$、　$a<0$のとき $|a| = -a$　でした。
つまり、｜ と ｜　に挟まれた部分（絶対値の中身）が正であればそのまま、負であればマイナスを付けるような感じなります。

これを使えば$\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = -1+\sqrt{2}$　となります。

ところで $|3-2\sqrt{2}|$ を求めようとした場合、中３でやったような「$3,\ 2\sqrt{2}$　ではどちらが大きいか」のような判断が必要になります。　$3=\sqrt{9},\ 2\sqrt{2}=\sqrt{8}$　であることより$3>2\sqrt{2}$が分かりますから
$|3-2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2}$　となります

問い）次の値を求めよ
1）$|2+\sqrt{5}|$　　2）$|-2+\sqrt{5}|$　　3）$|2\sqrt{2}-\sqrt{7}|$　　4）$|11-2\sqrt{3}|$

絶対値の中身　が文字を含み、式になっている場合は、やはりすべての場合を示さねばなりません。
$|k-1|$　は
$k-1>0$　すなわち　$k>1$　のとき　$|k-1| = k-1$
$k-1 \leqq 0$　すなわち　$k \leqq 1$　のとき　$|k-1| = -(k-1) = -k+1$
問い）次の値を求めよ
1）$|k|$　　2）$|a-1|$

3) $|1+2k|$

4) $|2-3k|$

5) $|3k|$

6) $|-3k|$

絶対値が記号化されましたから絶対値を含む方程式も登場します。

例) $|k-1|=1$

$i)$ $k-1>0$　すなわち $k>1$　のとき

$k-1=1$　より　$k=2$

$ii)$ $k-1\leqq 0$　すなわち $k\leqq 1$　のとき

$-(k-1)=1$　より　$k=0$

このようにみると

$|k-1|=1$ は　$\pm(k-1)=1$　または　$(k-1)=\pm 1$　として解いてしまっても良いようにも思えます。

では次の場合はどうでしょう？

例) $|x-1|=2x$

$x-1=\pm 2x$　として解くと

$x-1=2x$ のとき、　$x=-1$

$x-1=-2x$ のとき、　$x=\frac{1}{3}$

となります。

絶対値の処理をちゃんと行うと

$i)$ $x-1>0$ のとき、すなわち　$x>1$　のとき

$x-1=2x$ より　$x=-1$ であるが、これはこの場合の条件 $x>1$ を満たさないために、解としては不適当である。

$ii)$ $x-1\leqq 0$ のとき、すなわち $x\leqq 1$　のとき

$-(x-1)=2x$ より　$x=\frac{1}{3}$ で、これはこの場合の条件 $x\leqq 1$ を満たすので、解として適当である。

$x-1=\pm 2x$　としてしまうのは、絶対値の処理での条件が不透明になってしまうため、ミスを起こしやすい。

同じように「どのような数でも２乗すれば正になる」という考えで
$|x-1| = 2x$　の両辺を２乗して処理することもできる。
やってみましょう。
$|x-1| = 2x$ の両辺を２乗すると

$$(x-1)^2 = (2x)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4x^2$$
$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$(3x-1)(x+1) = 0$$
$$x = \frac{1}{3}, -1$$

となり、間違う。
両辺を２乗した場合も、やはり絶対値の処理での条件がブラインドになってしまったためにミスを起こしてしまった。

要するに、純粋な理屈をそのまま丁寧に適用すればよいのです。ピュアーな理屈を丁寧にできるようになってから、それぞれの人がそれぞれの力を使って色々とうまいやり方を考えてみてください。けれども、ピュアーな理屈が当然のこととなっていないうちに、「こうやればうまいいく」というやり方を身に着けてしまえば、基礎が盤石でないままに行うことになり、自分が行っていることが大丈夫かどうかの判断すら危うくなってしまいます。「同じようにやってみよう」は高校数学では危険です。できる限り「理屈を理解して、その理屈を適用する」ようにしましょう。高校数学で使う理屈は常識的なものばかりです。「どうしてそうなるのか、理屈はよくわからんけど、同じようにやってみよう」でできるようになった実力はニセモノの実力ですから。注意してください。（ただし、微分積分の範囲は、微小や無限という常識の範囲外のことを扱いますし、これを取り扱う基本は（なぜか）大学に入ってから学びますので、この範囲ではありません）

～余談　高校数学を学ぶときに大切なこと～
数学は人類が五千年以上かけて受け継ぎながら精製し、蓄積させたものです。受け継ぎ手にはガウスやニュートンなどの大天才も含まれています。このような歴史的天才のほかに、その数万倍もの数学者達がいます。注意しなければならないのは、こうして受け継がれてきた数学は、現在では問題の解き方の体系ではないということ。「どう解くか？」ではなく、問題文や現実世界の状況や条件を「どう表すか？」「どう読み取るか？」の体系です。数学の問題を解こうと思ったら、第一することは、どう解こうか考えることではありません。真っ先に解こうとはしません。まずは、言葉で与えられた問題文を式やグラフ、図など「数学の形式」に再表現しなおすことです。この表現の仕方が「数学の基礎その１」（数学で表現するためのルールです）。それから式やグラフの特徴を読み取る。この読み取り方が「数学の基礎その２」。または式を変形して読み取れる形に変える。「どんな形から、どんなことが読み取れるのか？」が「数学の基礎その３」。ここまでのプロセスを分析といいます。分析というのは、複数の要素が絡まったことがらを「分けて」「明らかにする（析）」ことです。「考える」というより「表現しなおす」ことです。大学入試の問題くらいであれば、難関大のものでも、分析だけで解くまでのプロセスの８割は終了しています。その後で、解き進める方針が決められます。絡まっていた複数の要素が「分けられて」「明らかになっている」のですから、方針選びができるようになっています。この解き進める方針（議論）についてが「数学の基礎その３」です（高校で学ぶ方針は、１０パターン前後しかありません）。ここまでのプロセスは再表現と読み取りがメインですから、ほとんど考えることはありません。けれども、この分析が「考える」ことの第一歩です。というより、考えることの半分以上を占めます。最先端の研究でも同じです。「その分野の形式によって表現しなおす＝分析を行い、それを再構成し、検証する」ことで研究結果を得ます。研究で新しいことを発見するというのが「考えること」「知識の活用」の１つというのであれば、「考える」とか「活用する」とい

うのは決して従来の「うんうん考え抜く」というイメージではないのではないかと思います。考え抜くのは、これらが十分行われた後で行うことです。ところで、大学入試でも、超難問であれば、分析の後に、読み取ったことを再構成する必要がありますが、ここまでの難問はなかなか出題されません。

高校数学を学ぶとき「同じようにやってみよう」が危険な状況に進ませてしまいます。同じようにやる繰り返し練習が有効なのは、計算や展開、因数分解など、技術的な練習と暗記です。技術は繰り返しでうまくなりますし、暗記も定着していきます。けれども応用問題は、これとは違う性質の力「数学の形式への表現や読み取り（丁寧な分析）」を使いますから、繰り返し練習の効果は限定的です。注意しましょう。

高校数学のはじめの部分は、一見、式の展開や因数分解など単純そうなことを学んでいるように見えるかもしれません。実際に「各自が教科書を読み進め、練習問題をやっておくように」と課題を出して、早々に終わらせてしまう高校もあります。しかし、それほど軽んじてよい部分ではなく、この部分で学ぶことは「式の着目点」「式の読み取り方」「議論の進め方」など、数学の応用力を養ううえで非常に重要なことを多く含みます。この部分をどのように学んだかによって、それ以降の数学の実力が大きく分かれていく傾向があります。

～余談　おわり～

絶対値が複数あっても、取り扱いは変わりません。

例）$y=|x|+|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを描きましょう

絶対値は絶対値の中身が正か負かで分けます。

とはいえ、この式では絶対値が４つもありますから場合分けが大変です。

$x>0$ かつ $x-1>0$ かつ $x-2>0$ かつ $x-3>0$　のとき

$x<0$ かつ $x-1>0$ かつ $x-2>0$ かつ $x-3>0$　のとき

$x<0$ かつ $x-1<0$ かつ $x-2>0$ かつ $x-3>0$　のとき

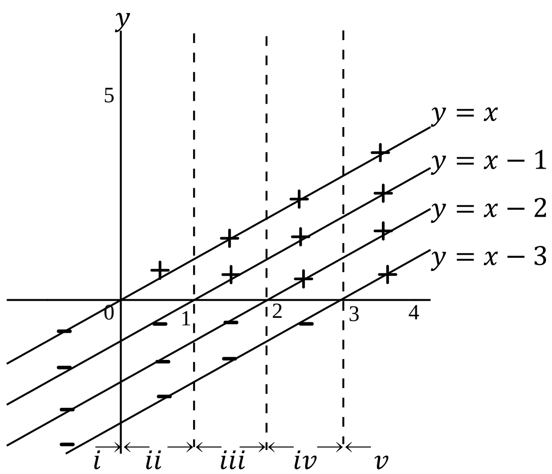
・

・

・

とやっていったのでは、何とも大変です。　前回の講義にあったように、正か負かを観察するのはグラフが有効でしたから、今回もグラフをつかっていきます。ただし！正負判断のグラフと、問題で要求されたグラフは別のものになります。２つの別のグラフを扱いますから、ここは丁寧に分離して扱いましょう。

各絶対値の正負を判断するために　$y=x,\ y=x-1,\ y=x-2,\ y=x-3$　グラフを描く



上のグラフのように正負が判断され、４つの部分に分けられる。

$i)$ $x<0$　$(x<0,\ x-1<0, x-2<0, x-3<0)$ のとき

$y=-x-(x-1)-(x-2)-(x-3)$

$y=-4x+6$

$ii)$ $0 \leqq x < 1$　$(x \geqq 0,\ x-1<0, x-2<0, x-3<0)$ のとき

$y = x - (x-1) - (x-2) - (x-3)$

$y = -2x + 6$

$iii)$ $1 \leqq x < 2$　$(x > 0,\ x-1 \geqq 0, x-2<0, x-3<0)$ のとき

$y = x + (x-1) - (x-2) - (x-3)$

$y = 4$

$iv)$ $2 \leqq x < 3$　$(x > 0,\ x-1 > 0, x-2 \geqq 0, x-3<0)$ のとき

$y = x + (x-1) + (x-2) - (x-3)$

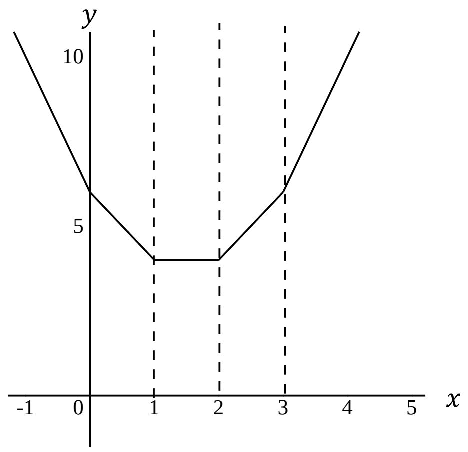
$y = 2x$

$v)$ $3 \leqq x$　$(x > 0,\ x-1 > 0, x-2 > 0, x-3 \geqq 0)$ のとき

$y = x + (x-1) + (x-2) + (x-3)$

$y = 4x - 6$

これより、$y = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-3|$ のグラフは次のようになる



問い）$y = |x| + |x-1| + |x+2|$ のグラフを描け

問い）$y=|x|+|2x-1|+|-3x+2|$ のグラフを描け。
またy $= 0$となるxが存在する場合は、その xの値を求めよ。
$y=2$となるxが存在する場合は、同様にその xの値を求めよ。

x以外の文字が含まれたら、その位置によって、場合分けも変わります。
問い）$y=|x|+|x-1|+|x-a|$ の最小値を aを用いて表そう
1）$a<0$ のとき $y=|x|+|x-1|+|x-a|$ のグラフを描け

2）a が（１）のほかの場合について、$y=|x|+|x-1|+|x-a|$のグラフを描け

3）aについての各場合分けでの最小値をaを用いて表せ。

4）$y=|x|+|x-1|+|x-a|$ の最小値が 2 となるようなaの値を求めよ

方程式でも、取り扱いは同じです。

問い）$|x|+|x-1|+|2x-1|=3$　を満たす xを求めよ。

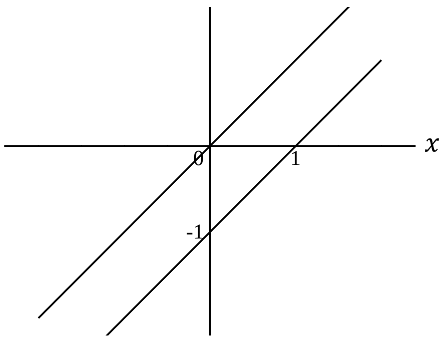
y

不等式にもなります。ただし、不等式では各条件が「かつ」で結びつくのか、「または」で結びつくのかを注意してください。また、最後に場合分けした各部分をまとめて答えにすることも忘れないでください。

例）$|x-1|+|x|<2$　を解け

まず今まで通り絶対値の中身についての正負判断です。

今回もグラフを用いて視覚を使って判断します。(視覚をつかうことで、判断の正確さや、矛盾の発見によるミスの防止、勘違いの防止、処理の単純化など恩恵は多い）



グラフよりx, $x-1$の正負関係を読み取ると

$i)$ $x<0$のとき　（$x<0$, $x-1<0$のとき）

$-(x-1)-x<2$　より　$x>-\frac{1}{2}$

条件$x>0$　かつ $x>-\frac{1}{2}$ であるから　$-\frac{1}{2}<x<0$

$ii)$ $0\leqq x<1$のとき　（$x>0$, $x-1<0$のとき）

$-(x-1)+x<2$　より　$-1<2$　となり、すべてのxで不等式を満たす。

条件$0\leqq x<1$　かつ、すべてのx であるから　$0\leqq x<1$

$iii)$ $1 \leqq x$のとき　（$x > 0,\ x-1 > 0$のとき）

$(x-1)+x < 2$　より　$x < \frac{3}{2}$　となり、すべてのxで不等式を満たす。

条件 $1 \leqq x$　かつ　$x < \frac{3}{2}$ であるから　$1 \leqq x < \frac{3}{2}$

$i)$ $ii)$ $iii)$ より

$-\frac{1}{2} < x < 0$　または　$0 \leqq x < 1$ または　$1 \leqq x < \frac{3}{2}$ より　$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ が与式を満たす範囲となる。

先ほど、絶対値を含む関数のグラスを描けるようになりましたから、まで不等式ではなくグラフを使って視覚化して解いてもかまいません。

各絶対値の中身の正負判断までは、先ほどと同じ流れです。

その後$y = |x-1| + |x|$　のグラフを描き、2 より小さい部分を探します。

$y = |x-1| + |x|$のグラフを描く

$i)$ $x < 0$のとき　（$x < 0,\ x-1 < 0$のとき）

$y = -(x-1) - x$

$y = -2x + 1$

$ii)$ $0 \leqq x < 1$のとき　（$x > 0,\ x-1 < 0$のとき）

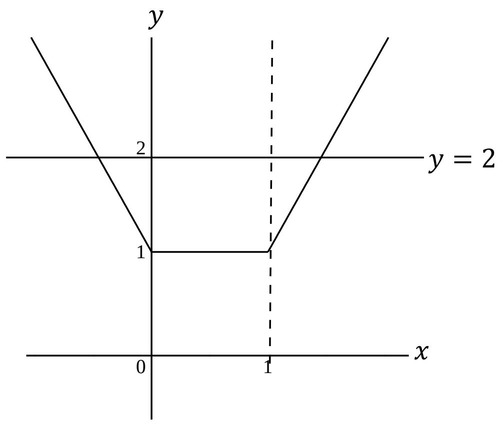
$y = -(x-1) + x$

$y = 1$

$iii)$ $1 \leqq x$のとき　（$x > 0,\ x-1 > 0$のとき）

$y = (x-1) + x$

$y = 2x - 1$



グラフより$|x-1| + |x| = 2$となるのは

$-2x + 1 = 2$ より　$x = -\frac{1}{2}$　　または　　$2x - 1 = 2$ より $x = \frac{3}{2}$

よって$|x-1| + |x| < 2$　を満たす範囲は　$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$　である。

どちらの方法でもよいのですが、大切なのは「どの方針をとるか？」という意識をもって解くこと。また、「計算間違えなどのミスの少ない方針」「ミスをしたとしても、気づきやすい方針」であることが、方針決定の基準として大きいものと思います。

問い）次の方程式または不等式を解け

1）$|x|+|x-3|=5$

2）$3|x-1|=2x$

3）$|2x-1|+|x-3|\leqq 6$

4）$|x-1|+\left|\frac{1}{2}x-3\right|-|x+1|>\frac{1}{3}(x-2)$

さて、ここまでの正負判断の方法は、視覚化によりご利益の多い方法ですが、難点は絶対値に含まれる文字が複数になった場合にあります。

例えば　$|x|+|x-1|-|y|-|y-1|=0$　などです。この場合、xの場合分けとyの場合分けが必要なため、2 次元平面上での場合分けになります。平面を使いますから、先ほどの正負判断ではプロセスが長くなってしまいます。

そのような場合は「引き算の読み取り」の力を借りると楽になります。(ただし、先ほどの視覚化よりも迷子になりやすいですから、視覚化による正負判断を身に着けたうえで、それをイメージしながら行うことで迷子にならずに進められます。)

引き算の読み取り

引き算　$x-a$　は　「　aから見た　x」を表します。

例えば　$3-1=2$　は「1から　3　をみると　2　であること」を表します。

$1-3=-2$　は「3から　1　をみると　-2　であること」を表します。

言われてみれば「なーんだ」というようなものですが、それを明確に意識して使うかが差を生みます。

$|x|+|x-1|$　では　$x=0$　からみて　左は　xが負　　右は xが正

　　　　　　　　　　　$x=1$　からみて　左は　$x-1$が負　　右は $x-1$が正

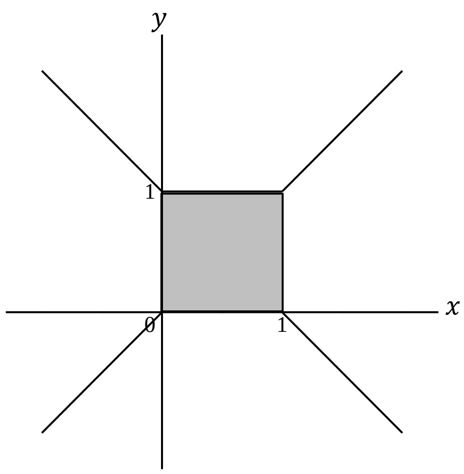
こうしてみると、ますます「なーんだ」と思うかもしれませんが、意識して使うのが重要。

さて

$|x|+|x-1|-|y|-|y-1|=0$　をxy平面上に場合分けします。

$x-1<0, x<0, y-1>0\ y>0$ より　$-2x-2y-2=0$ $y=-x+1$	$x-1<0, x\geqq 0$ $y-1\geqq 0\ y>0$ より $2-2y=0$ $y=1$	$x-1\geqq 0, x>0, y-1\geqq 0\ y>0$ より　$2x-2y=0$ $y=x$
$x-1<0, x<0, y-1<0, y\geqq 0$ より　$-2x=0$ $x=0$	$x-1<0, x\geqq 0$ $y-1<0, y>0$ より $0=0$ すべてのx, y	$x-1\geqq 0, x>0, y-1<0, y\geqq 0$ より　$2x-2=0$ $x=1$
$x-1<0, x<0, y-1<0, y<0$ より　$-2x-2y=0$ $y=x$	$x-1<0, x\geqq 0$ $y-1<0, y<0$ より $2y=0$ $y=0$	$x-1\geqq 0, x>0, y-1<0, y<0$ より　$2x+2y-2=0$ $y=-x+1$

これをグラフに描くと、次のようになります。



問い）$|x|+|y|=1$　を満たすグラフを描け。

また、$|x|+|y|=1$と$y=3x-\frac{1}{2}$　との交点を求めよ

問い）$|x|+|2x-1|-|y|=0$　を満たすグラフを描け。

また、$|x|+|2x-1|-|y|=2x$　を満たすxを求めよ

今日の講義をまとめよう

まず・・・プリントを見返さないで、今覚えているものを書き出してみよう

・今回学んだ　着目個所　はありましたか？　それはどんなことでしたか？

・今回学んだ　グラフや図、表、式への表現方法　はありましたか？　それはどんなことでしたか？

・今回学んだ　式やグラフからの読み取り　はありましたか？　それはどんなことでしたか？

つぎに・・・プリントを見返してみて、足りないことを書き足したり、違ったことを赤で直して書こう

・今回学んだ　着目個所

・今回学んだ　グラフや図、表、式への表現方法

・今回学んだ　式やグラフからの読み取り